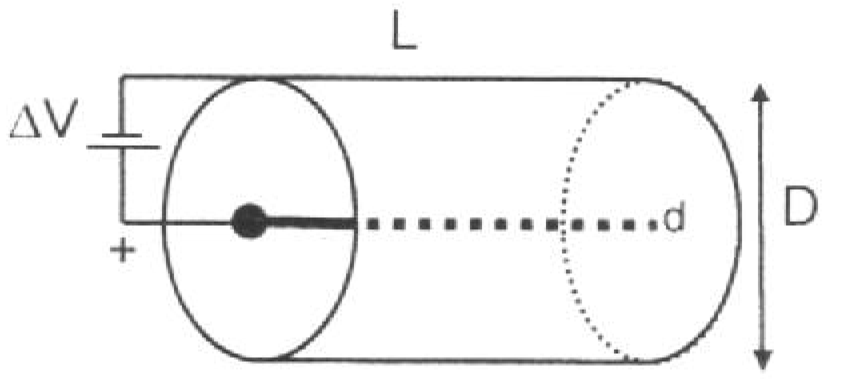
Prova scritta di Fisica 2 7.2.2017

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Un condensatore è costituito da una superficie cilindrica metallica di diametro **D** e lunghezza **L** lungo il cui asse è posto un filo metallico di diametro **d**. Al condensatore è applicata la d.d.p. **ΔV**. Calcolare: A) La densità lineare di carica elettrica presente sul filo. B) Il campo elettrico sulla superficie del filo e sulla superficie interna del cilindro. C) l'energia legata al campo elettrico presente nel condensatore.
Si assuma il condensatore nel vuoto e ideale, cioè senza campo elettrico disperso all'esterno del condensatore. Nota: il disegno non è in scala.



Dati: D = 2,4 cm ; d = 2 mm ; L = 1 m ; ΔV = 900 V

La carica sul filo genera $\vec{E}(r)$; e ΔV dipende da $\vec{E}$:

$$\phi(\vec{E})_{r}^{(1)} = \int_{S(r)} \vec{E}(r)\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot 2\pi r\cdot L = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$\Delta V = V^+ - V^- = -\int_{D/2}^{d/2} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\Big|\ln r\Big|_{D/2}^{d/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{d}$$

quindi $$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0\,\Delta V}{\ln D/d} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\,\frac{\Delta V}{\ln D/d} = \frac{\cancel{9}\cdot 10^2}{\cancel{9}\cdot 10^9\cdot \cancel{2\cdot 2{,}5}} = 20\ nC/m \quad \therefore$$

$$E(d/2) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2}{d} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 20\cdot 10^{-9}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 10^{-3}} = 36\cdot 10^4 = 3{,}6\cdot 10^5\ V/m$$

$$E(D/2) = E\left(\frac{d}{2}\right)\cdot\frac{d}{D} = 3{,}6\cdot 10^5\,\frac{2\cdot 10^{-3}}{24\cdot 10^{-3}} = 3\cdot 10^4\ V/m$$

$$\mathcal{E} = \int \varepsilon\, d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{d/2}^{D/2} E^2(r)\cdot 2\pi r\cdot L\, dr = \frac{\varepsilon_0\, 2\pi L}{2}\int \frac{\lambda^2}{(2\pi\varepsilon_0)^2}\,\frac{r}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{\lambda^2 L}{4\pi\varepsilon_0}\ln D/d = 9\cdot 10^9\,(20\cdot 10^{-9})^2\cdot 1\cdot 2{,}5 = 9\cdot 10^{-6}\ J$$

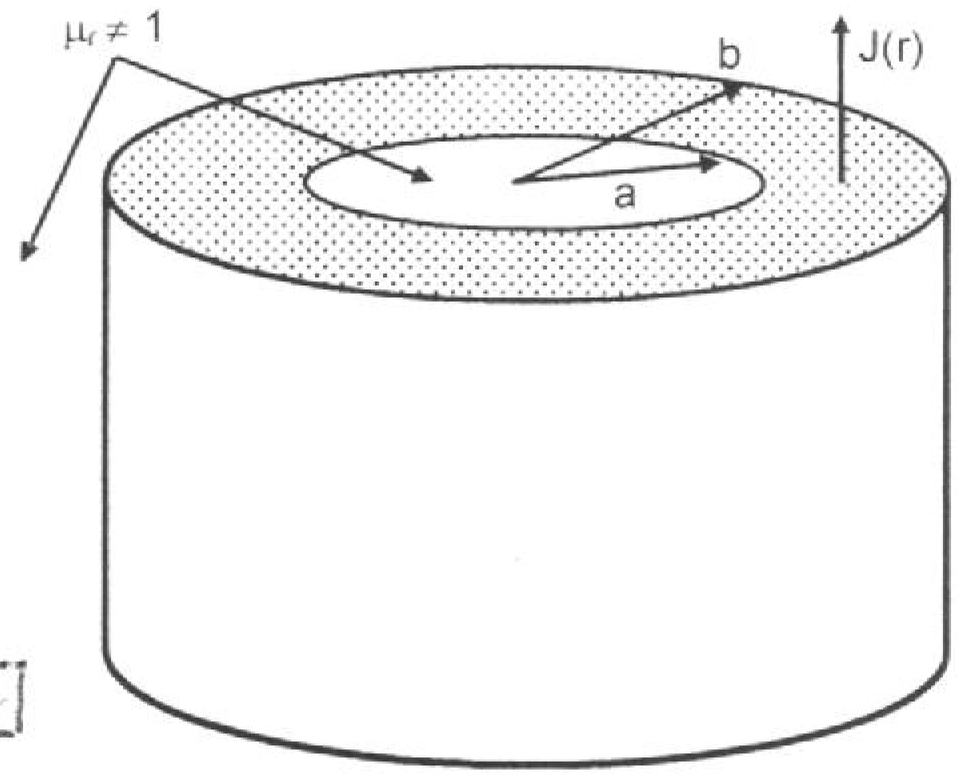
Anche: $$\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Q}{\Delta V}\,\Delta V^2 = \frac{1}{2}\lambda L\,\Delta V = \frac{20\cdot 10^{-9}\cdot 900}{2} = 9\cdot 10^{-6}\ J$$

(1) Il flusso viene calcolato attraverso una superficie cilindrica di raggio r e lunga L, dove $\vec{E}\perp\hat{n}$.

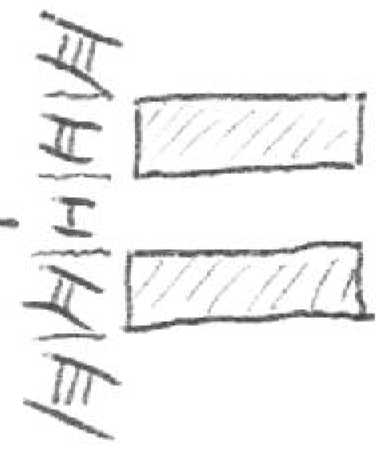
Esercizio n.2 **[10 punti]**

Un conduttore è costituito da un cilindro cavo di raggio interno **a** e raggio esterno **b**, di lunghezza molto maggiore di b, percorso da una corrente costante nel tempo con densità di ~~carica~~ corrente che varia radialmente **J(r)=γ/r.** Lo spazio all'interno e all'esterno del cilindro cavo è riempito con un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_r, mentre il conduttore ha permeabilità magnetica relativa uguale ad 1. Calcolare le espressioni dei campi **B(r), H(r) e M(r)** e farne il grafico calcolandone i valori nel punto **r = b**.

Dati: a = 2 cm ; b = 4 cm ; γ = 2 A/m ; μ_r **= 2** (è un valore inusuale, viene dato così per semplicità nei calcoli).



Dividiamo lo spazio in 3 zone



I) $r < a$

II) $a < r < b$

III) $r > b$

La legge usata è $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \Sigma i$

I) $\oint \bar{H}_1 \cdot d\bar{l} = 0 \qquad H_1 = 0 \quad B_1 = 0 \quad M_1 = 0$

II) $\oint \bar{H}_{II} \cdot d\bar{l} = 2\pi r \cdot H_{II}(r) = i(r)$

$$i(r) = \int_a^r J(r) \cdot 2\pi r \, dr = 2\pi \int_a^r \frac{\gamma}{r} r \, dr = 2\pi\gamma(r-a)$$

$$\Rightarrow H_{II}(r) = \frac{\gamma}{r}(r-a) = \gamma\left(1 - \frac{a}{r}\right) \qquad B_{II}(r) = \mu_0 H_{II}(r)$$

$$M_{II}(r) = \chi H_{II}(r) = (\overset{=0}{\mu_r - 1}) H_{II}(r) = 0$$

III) $\int \bar{H}_{III}(r) \cdot d\bar{l} = 2\pi r H_{III}(r) = i_{TOT} = i(r=b) = 2\pi\gamma(b-a)$

$$\Rightarrow H_{III}(r) = \frac{\gamma}{r}(b-a) \qquad B_{III}(r) = \mu_r \mu_0 H_{III}(r) = \mu_0 \frac{2\gamma}{r}(b-a)$$

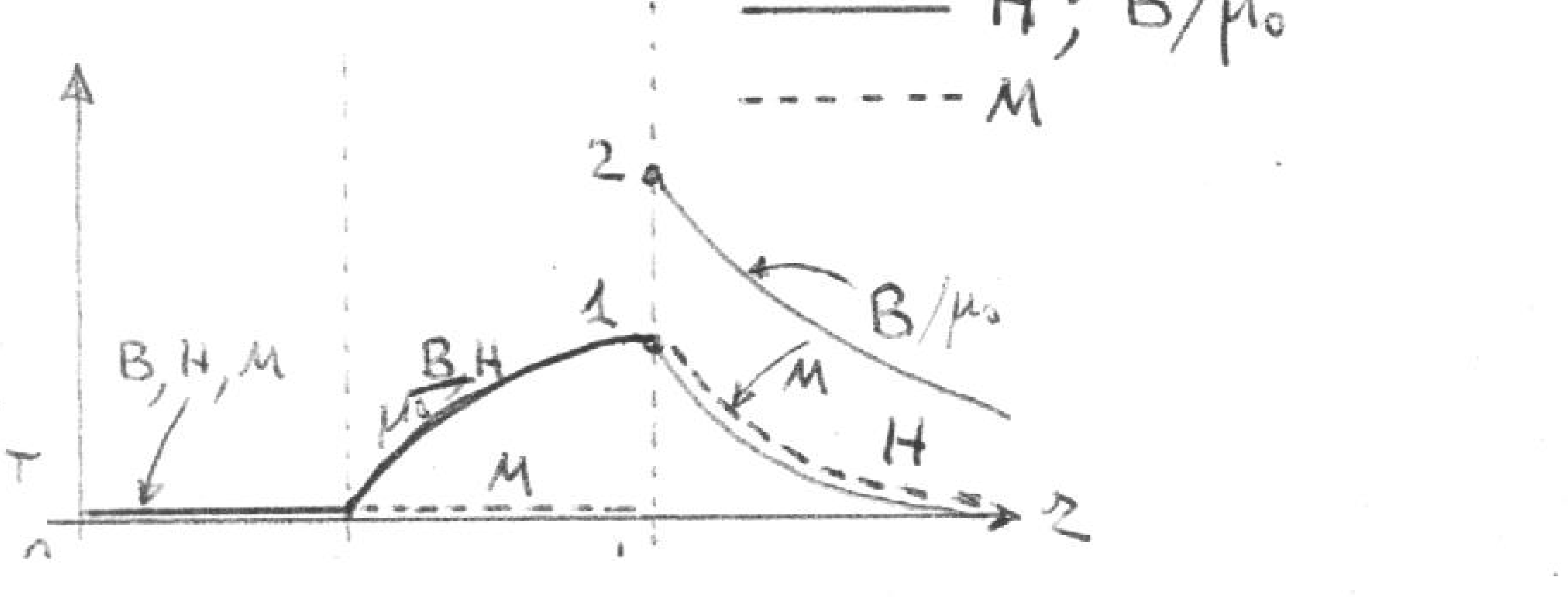
$$M_{III}(r) = (\mu_r - 1) H_{III}(r) = H_{III}(r)$$

Calcoli: $M_{II}(b) = H_{II}(b) = 2\left(1 - \frac{2}{4}\right) = 1 \ A/m$

$B_{II}(b)^- = \mu_0 [T] = 4\pi \cdot 10^{-7} \ T$

$M_{III}(b) = H_{III}(b) = H_{II}(b) = 1 \ A/m$

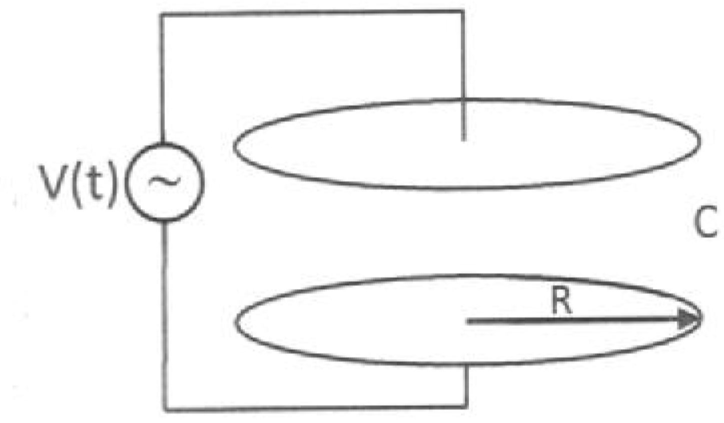
$B_{III}(b)^+ = 2 B_{II}(b)^- = 2\mu_0 [T] = 8\pi \cdot 10^{-7} \ T$



Prova scritta di Fisica 2 7.2.2017

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un condensatore piano con le armature circolari di raggio **R** è collegato ad un generatore di f.e.m. alternata. La carica del condensatore varia nel tempo con legge **Q(t)= Q₀ cos (ωt)**. Trascurando gli effetti di bordo si calcoli l'espressione della circuitazione del campo **B** lungo una generica linea di forza del campo dentro il condensatore e il valore numerico del valore massimo per **r = R/2**, essendo r la distanza dall'asse del condensatore.



Dati: R = 2π cm , Q₀ = 1 μC ; ω = 2π · 10⁵ rad/s

Nel condensatore è presente solo la densità della corrente di spostamento che genera un campo $\bar{B}$ le cui linee di forza sono delle circonferenze intorno all'asse.

Circuitazione di $\bar{B}$ $\oint_{\ell(r)} \bar{B}(r)\cdot d\bar{\ell} = \mu_0 \sum i(\text{interne})$

Metodo A) i_T(totale di conduzione nel circuito) $= \frac{dQ}{dt} =$ i(totale di spostamento)

$i_T = -Q_0\omega\,\text{sen}\,\omega t$ $\quad i_r = J_r\cdot S = \frac{i_T}{\pi R^2}\pi r^2$

$$\Rightarrow \oint \bar{B}(r)\cdot d\bar{\ell} = B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 i_T \frac{r^2}{R^2}$$

Metodo B) $\oint_{\ell} \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = \int_{S(\ell)} \text{rot}\,\bar{B}\cdot d\bar{S} = \mu_0\int_{S(\ell)}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\cdot dS = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_{S(\ell)}\bar{E}(r)\cdot d\bar{S}$

ma $\bar{E}(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\pi R^2}\frac{1}{\varepsilon_0}$ [costante in r] $\Rightarrow L_0 = \frac{Q(t)}{\pi R^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2$

quindi $\oint \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0\frac{\partial Q(t)}{\partial t}\frac{r^2}{R^2}$ come sopra

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2}\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2}Q_0\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

$$B_{MAX}(r=R/2) = \frac{\mu_0}{\cancel{2\pi}}\frac{R}{2}\frac{1}{R^2}Q_0\cancel{2\pi}\cdot f = \frac{\cancel{4\pi\cdot 10^{-7}}\cdot 10^{-6}\cdot\cancel{10^{5}}}{\cancel{2}\cdot 2\pi\cdot\cancel{10^{-2}}} = 1\,\mu T$$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.
Valori che potrebbero essere utili: ln 20 = 3 ; ln 12 = 2,5 ; ln 8 = 2,1 ; ln 4 = 1